# Programme de colle n°13

semaine du 5 au 9 janvier

## Notions vues en cours

**Chapitre 16 : Relations binaires**

- Relation binaire, relation d'équivalence, classe d'équivalence, notations $\mathrm{cl}(x)$ ou $\bar{x}$, représentant d'une classe d'équivalence, les classes d'équivalence (distinctes) forment une partition
- Relation d'ordre, ensemble ordonné, éléments comparables, ordre total, ordre partiel
- Dans un ensemble ordonné : majorant / minorant / minimum / maximum / partie majorée / minorée / bornée, unicité du minimum et du maximum

**Chapitre 17 : Arithmétique**

- Relation "divise", notation $b \mid a$, l'ensemble des diviseurs de $a$ est noté $\mathrm{div}(a)$, l'ensemble des mutliples de $b$ est $b\mathbb{Z}$.
- La relation "divise" restreinte à $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre. Sur $\mathbb{Z}$, non : si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $|a| = |b|$ et on dit que $a$ et $b$ sont associés
- Propriétés diverses de la division : $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \implies \forall u, v \in \mathbb{Z} \quad d \mid au + bv$ ; si $c \neq 0$, alors $a \mid b \iff ac \mid bc$
- Division euclidienne de $a$ par $b \neq 0$, le reste est nul ssi $b \mid a$
- PGCD de deux entiers, notation $a \wedge b$, convention $0 \wedge 0 = 0$, propriétés évidentes (commutativité, $a \wedge b = b \iff b \mid a$...)
- Si $a = bq + r$ alors $\mathrm{div}(a) \cap \mathrm{div}(b) = \mathrm{div}(b) \cap \mathrm{div}(r)$, propriété $\mathrm{div}(a) \cap \mathrm{div}(b) = \mathrm{div}(a \wedge b)$, algorithme d'Euclide
- Théorème de Bézout-Bachet (nom officiel : relation de Bézout), coefficients de Bézout de deux entiers, algorithme d'Euclide étendu, règle de factorisation $(ca) \wedge (cb) = c(a \wedge b)$ avec $c \in \mathbb{N}^*$
- Entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $\dfrac{a}{a \wedge b}$ et $\dfrac{b}{a \wedge b}$ sont premiers entre eux, forme irréductible d'une fraction
- Trois corollaires du théorème de Bézout : 1) lemme de Gauss, 2) $(a_1 \wedge b = 1 \text{ et } a_2 \wedge b = 1) \implies (a_1 a_2) \wedge b = 1$, 3) $(a \mid c \text{ et } b \mid c \text{ et } a \wedge b = 1) \implies ab \mid c$
- Congruence : définition, caractérisation, relation d'équivalence, lien avec le reste de la division euclidienne
- Congruence et opérations : addition, soustraction, multiplication (par une constante ou terme à terme d'une autre congruence), puissance, division (crochet inclus) dans une congruence
- Inverse d'un entier $a$ modulo $n$ : définition, existence ssi $a \wedge n = 1$, "division" dans une congruence (on multiplie par l'inverse), méthode pour trouver un inverse modulo $n$, pour résoudre une équation $ax \equiv b\ [n]$
- Résolution d'équations diophantiennes de la forme $ax + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ donnés et d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$ ; des équations d'autres formes ont été vues en TD.
- PPCM de deux entiers non nuls, notation $a \vee b$, convention $a \vee 0 = 0$, propriétés évidentes du PPCM, propriété $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$, identité $(ca) \vee (cb) = c(a \vee b)$ avec $c \in \mathbb{N}^*$, formule $(a \vee b)(a \wedge b) = |ab|$

*Les PGCD de plusieurs entiers et les nombres premiers ne sont pas au programme de cette semaine.*

**Les questions de cours sont en page suivante**

## Questions de cours

**Question Flash.** Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **14 à 16**).

**Question Longue.** *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.* ***Les énoncés des théroèmes doivent être clairement... énoncés !***

1. Division euclidienne : on ne démontrera que l'unicité Chapitre 18, Théorème 18.6
2. Sans démonstration : théorème de Bézout–Bachet. Avec démonstration : factorisation par un entier dans le PGCD Chapitre 18, Théorèmes 18.12 et 18.13
3. Théorème de Bézout et Lemme de Gauss. On donnera également les énoncés de deux autres corollaires du théorème de Bézout et on démontrera l'un des deux, au choix de l'étudiant(e) Chapitre 18, Théorème 18.16 et Corollaires 18.18 à 18.20

**Questions Flash au programme :**

Chapitre 16 :

- Soit $E$ un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence sur $E$ ?
- Soit $x \in E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Donner la définition de la classe d'équivalence de $x$.
- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Si $x\mathcal{R}y$, que peut-on dire des classes d'équivalence de $x$ et $y$ ?
- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$ avec trois classes d'équivalences distinctes $A, B, C$. Que peut-on dire sur $A$, $B$ et $C$ ?
- Soit $E$ un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'ordre sur $E$ ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$. Que doit vérifier $\preceq$ pour être un ordre total ? Comment appelle-t-on un ordre qui n'est pas total ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$ et $A \subset E$. Que doit vérifier $A$ pour être bornée ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$ et $A \subset E$. Que doit vérifier $M$ pour être le maximum de $A$ pour $\preceq$ ?

Chapitre 15 :

- À quelle condition $f$ est-elle dérivable à droite en $a$ et que vaut alors $f'_d(a)$ ?
- Si $f$ est dérivable à droite et à gauche en $a$, peut-on dire que $f$ est dérivable en $a$ ?
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Donner une ou des conditions nécessaires qui permettent de déduire qu'un point $a$ est un point critique de $f$.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Donner la définition de fonction lipschitzienne.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
- Que doit vérifier $f$ pour être une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ ? et de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- Soit $g, h$ deux fonctions $\mathscr{C}^n$. Énoncer la formule de Leibniz pour la fonction $f = gh$.

Chapitre 14 :

- Donner la définition de "$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$" en termes de quantificateurs pour $a$ et $\ell$ finis.
- Des variantes de la question précédente où $a$ et/ou $\ell$ peuvent être égaux à $+\infty$ ou $-\infty$.
- Donner les quatre formes indéterminées qui font intervenir les opérations somme, produit et quotient.
- Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite pour une fonction $f$, pour une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ au point $a$.
- Est-ce qu'une fonction qui admet une limite à gauche et à droite en un point qui sont égales admet nécessairement une limite en ce point ? Si c'est faux, tracer un contre-exemple.
- Donner la définition de "$f$ est continue en $a$" en termes de limite puis en termes de quantificateurs.
- Est-ce qu'une fonction qui est continue à gauche et à droite en un point est nécessairement continue en ce point ? Si c'est faux, tracer un contre-exemple.
- Soit $a \in D$. À quelle condition peut-on prolonger par continuité une fonction $f$ définie sur $D \setminus \{a\}$ au point $a$ ? Que vaut alors $f(a)$ ?
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Énoncer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires *(celui qui traite de l'injectivité, indication qui ne sera pas mise sur le sujet de colle !)*.
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- Énoncer le corollaire du théorème des bornes atteintes *(celui qui dit que l'image de tout segment par une fonction continue (...), indication qui ne sera pas mise sur le sujet de colle !)*.